4　不完備情報の動学ゲーム

≪学ぶこと≫

Ⅰ　完全ベイジアン均衡（perfect Bayesian equilibrium）

• ベイジアン･ナッシュ均衡の精緻化。

• プレーヤーの信念を明示的に分析に取り込むことで、サブゲーム完全なナッシュ均衡の条件を強めたものとして考える。

Ⅱ　シグナリング･ゲーム（Signaling Game）

• 私的情報を持つプレーヤーが、別のプレーヤーに、ある「シグナル」（メッセージ）を送るようなゲーム。

• 「シグナル」によって、コミュニケーションを図るということ。

4.1

→図 4.1.1 のゲームの特徴

• サブゲームを持たない。…この場合ゲームの均衡は「サブゲーム完全」であると見なす。

• しかし、(R, R') は信憑性のない脅しに依存している。

★　このような事態が起こらないようにするために、次の条件を課す。

＜条件1＞

各情報集合ごとに、そこで手番を有するプレーヤーは、その情報集合のどの節がプレーの結果として到達されたかについてある　　　**belief**　を持たねばならない。

　　　　…情報集合に含まれる節上の確率分布のこと。

＜条件2＞

　　を所与としたとき、プレーヤーの戦略は　　　　　　**sequentially rational**　でなくてはならない。

　　　　　　　　…各情報集合において、そこで手番を有するプレーヤーは、そこでの
とほかのプレーヤーのそのあとの　　を所与として最適になっていなくてはならないこと。

⇒以上の条件を、図 4.1.1 のゲームに課すと、結果はどうなるかを見る。

≪新たな問題≫

★　しかし、上の条件だけでは、信念自体が理に適ったものかどうかについては、定かではない。信念の合理性について改めて条件付けなくてはならない。

定義

所与の“展開型ゲーム”において均衡がひとつ与えられているとする。
このゲームが“均衡戦略”に沿ってプレーされた場合について…
①ある情報集合が“正の確率”で到達される。
⇒　　　　　　　　　　**on the equilibrium path**）
②ある情報集合は、到達される確率はゼロである。
⇒　　　　　　　　　　**off the equilibrium path**

＜条件3＞

　　　　　　　　情報集合においては、　　は“ベイズの公式”とプレーヤーの“均衡戦略”とによって決定される。

≪結論≫

☆　*＜条件1＞*から*＜条件3＞*までが、　　　　　　　　　　の考え方をあらわしている。
☆　（形式的には）　　は、もはや各プレーヤーの戦略だけからなるのではなく、各プレーヤーが手番を有する情報集合における＿＿をも（明示的に）含んでいるのでなくてはならない。

　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…各プレーヤーが、理に適った信念を保持しなければならないと主張できる。

☆　また、均衡経路上において、（あるいは、均衡経路上になくても）以下をみたす。
　“理に適った信念を持つ”⇒“信憑性のない戦略は選ばれない”

≪補足≫

より複雑な応用では、更に次の*＜条件4＞*が課され、かつそれを含めて完全ベイジアン均衡の定義とする場合がある。ここでも、（一応）正式にはこれに従うものとする。

＜条件4＞

　　　　　＿＿情報集合においては、　　は、それが可能な場合、“ベイズの公式”とプレーヤーの“均衡戦略”とによって決定される。

定義　　　　　　　　　**perfect Bayesian equilibrium**

完全ベイジアン均衡は、*＜条件1＞*～*＜条件4＞*までみたす　　と　　からなる。

◇ なぜ*＜条件4＞*が必要か…

→図 4.1.4 において「均衡の精緻化」という観点からその必要性を探る。

✓ *＜条件 3＞*は均衡経路上にある信念のみに、合理性を要求するものであった。

⇔ある信念を考えたとき、それが均衡経路上にあるならば、合理的な信念でなくてはならない。

⇒しかしこれだけだと、ある信念が、均衡経路上に**ない**場合、必ずしもその信念が合理的である必要はなくなってしまう。

✓ このとき、「均衡の精緻化」からは望ましくない均衡が現れてしまう。*＜条件4＞*は、そのような事態を避けるために、均衡経路上にない場合でも、(可能な限り) 信念は合理的でなくてはならないと主張する。

◆ **完全ベイジアン均衡と、強く支配される戦略の関係**

- 均衡となる戦略の組では、プレーヤーの誰一人として強く支配される戦略を選ぶことはなかった。しかし、**均衡経路上にない場合**については今まで考えていなかった。

  ⇒『"強く支配される戦略は決して選ばれない" という均衡』についての場合分け

～均衡経路上にある場合～	～均衡経路上にない場合～
• ナッシュ／ベイジアンナッシュ均衡	• 完全ベイジアン均衡
• サブゲーム完全ナッシュ均衡	
• 完全ベイジアン均衡	

◆ **完全ベイジアン均衡の(機械的)導出と backwards-induction の関係**

〔主張〕完全ベイジアン均衡を求めるとき、サブゲーム完全均衡の時のように、ゲームツリーを後ろ向きに遡って解いていく事は、時として不可能となる。

〔理由〕信念に関する条件により、議論が循環してしまうから。

4.2

4.2.A シグナリング・ゲームの完全ベイジアン均衡

◆ **シグナリング・ゲームの特徴とゲームの手順の説明**

- 不完備情報の動学ゲーム
- 送り手 (Sender) と受け手 (Receiver) の２人のプレーヤーからなる。

手順1 : 自然が確率分布 $p(t_i)$ に従って、可能なタイプの集合 $T=\{t_1,\cdots,t_I\}$ から送り手のタイプ t_i を決める。ここで、全ての $i\in I$ に関し $p(t_i)>0$、かつ $\sum_{i=1}^{I}p(t_i)=1$

手順2 : 送り手は、t_i を知ったのち、可能なメッセージの集合 $M=\{m_1,\cdots,m_J\}$ から、メッセージ m_j を一つ選ぶ。

手順3：受け手は、m_j を知った後（t_i は知らない）、可能な行動の集合 $A=\{a_1,\cdots,a_K\}$ から、行動 a_k を一つ選ぶ。

手順4：利得が $U_S(t_i,m_j,a_k)$ と $U_R(t_i,m_j,a_k)$ によって決まる。

◇　図 4.2.1→（抽象的な）シグナリング・ゲームの展開形

≪ポイントと用語≫

- 送り手の純粋戦略… $m(t_i)$
- 受け手の純粋戦略… $a(m_j)$
- 一括型（pooling）戦略／均衡
- 分離型（separating）戦略／均衡
- 混成型（hybrid）戦略／均衡

◆　完全ベイジアン均衡の条件をシグナリング・ゲームに適用し、シグナリング・ゲームを完全ベイジアン均衡として捉える。

＜シグナリングの条件１＞

メッセージ $m_j\in M$ を観察した後で、受け手は、m_j がどのタイプによって送られたかについての信念 $\mu(t_i|m_j)$ を形成しなくてはならない。全ての $t_i\in T$ に関して、$\mu(t_i|m_j)>0$、かつ $\sum_{t_i\in T}\mu(t_i|m_j)=1$

＜シグナリングの条件２…受け手について＞

各 $m_j\in M$ について、信念 $\mu(t_i|m_j)$ を所与としたとき、次式をみたす。

$$a^*(m_j)\in \arg\max_{a_k\in k}\sum_{t_i\in T}\mu(t_i|m_j)U_R(t_i,m_j,a_k)$$

⇒受け手の最適な行動は、自分（受け手）の期待効用を最大にする行動。

＜シグナリングの条件２…送り手について＞

各 $t_i\in T$ について、受け手の戦略 $a^*(m_j)$ を所与としたとき、次式をみたす。

$$m^*(t_i) \in \arg\max_{m_j \in M} U_S(t_i, m_j, a^*(m_j))$$

⇒送り手の最適な行動は、自分（送り手）の効用を最大化しなくてはならない。

＜シグナリングの条件３＞

均衡経路上にあるメッセージ$m_j = m^*(t_i)$について、タイプ$t_i \in T_j$に関する信念は、次式を成立させる。

$$\mu(t_i | m_j) = \frac{p(t_i)}{\sum_{t_i \in T_j} p(t_i)}$$

定義

シグナリング･ゲームにおける<u>**純粋戦略の完全ベイジアン均衡**</u>とは、上記の***＜シグナリングの条件＞***全てを満たす　$m^*(t_i), a^*(m_j)$と　$\mu(t_i | m_j)$の組である。

◇　図 4.2.2 のシグナリング・ゲームの完全ベイジアン均衡を、例として求める。

• 可能性として、4 種類の<u>**純粋完全ベイジアン均衡**</u>（一括均衡と分離均衡）が存在すると考えられる。

• 結論としては、この場合だと、<u>**一括均衡**と**分離均衡**が一つづつ存在する</u>ことがわかる。

$[(L,L),(u,d), p = 0.5, q \le 2/3]$… L への一括完全ベイジアン均衡と、

$[(R,L),(u,u), p = 0, q = 1]$…$t_1$が R をプレーし、$t_2$が L をプレーする分離完全ベイジアン均衡。

4.2.B　就職市場のシグナリング

≪目的≫

スペンスのモデルを展開形ゲームとして述べ直し、完全ベイジアン均衡のいくつかを記述する。

≪手順≫…企業数は1つとします。

1. 自然（nature）が労働者の生産能力ηを決める。

$$\eta = \begin{cases} H & w.p \quad q \\ L & w.p \quad 1-q \end{cases}$$

2. 労働者は自分の能力を知って教育水準$e \ge 0$を選択。※<u>ここでのeは**学歴**や**成績**と解釈</u>。
3. 企業は、労働者の教育水準を知ったのち（しかし<u>労働者の能力は知らずに</u>）、労働者に対して賃金を提示する。
4. 労働者はそれらのうちどれかを受け入れる。

◆　以下、上記枠組に沿ったモデルを立てて考えてゆく。

≪モデルの仮定≫

✓　$y(\eta,e)-w$ …経営者の利潤

（ $y(H,e)>y(L,e),\forall e\geq 0$ …任意の教育水準においては高能力の労働者の方が生産的。）

（ $y_e(\eta,e)\geq 0,\forall e,\eta\geq 0$ …教育が生産性を下げることはない。）

✓　$w-C(\eta,e)$ …労働者の利得

★ $C_e(L,e)>C_e(H,e),\forall e\geq 0$ …低能力労働者は、任意の同じ教育水準から追加的に努力したときの努力コストが、高能力の労働者より大きくなる。

⇒教育水準を同じだけ高める際の費用を補償するために必要な賃金上昇は、低能力労働者のほうが大きい。→図 4.2.3

≪考えたい完全ベイジアン均衡≫

企業が教育水準を**能力のシグナル**と見なし、**高い教育水準**の労働者に**高賃金を提示**するというもの。

⇒それとの比較のため、とりあえず「完全情報」の場合を考えてみる。

cf *～各労働者のタイプ（能力）が全プレーヤーの共有知識である場合～*

✓　この産業が十分競争的であるとしますと、各タイプの生産量に応じた賃金を提示することになる。

→　$w(e)=y(\eta,e)$ を提示。

✓　従って、能力ηを持つ労働者は、次の式をみたす教育水準 e を選ぶ。

→　$\max_{e} y(\eta,e)-C(\eta,e)$

✓　このファーストベストの給与と生産量を次のように定義しておく。

→　$w^*(\eta)=y[\eta,e^*(\eta)]$

では、労働者のタイプに関し、「情報の非対称性」がある場合を考える。

◆　*～労働者のタイプ（能力）が私的情報である場合～*

✓　以下では専ら、低能力労働者（L タイプ）が高能力労働者（H タイプ）の振りができる場合を考える。

✓　この場合、　　　　　　　　　　　　　　　　　　の 3 種類の完全ベイジアン均衡が数多く存在することになるが、以下、いくつかの例に絞って見ていく。

≪一括均衡～ケース①～≫…タイプに関わらず同じメッセージを送る。

(ア) どちらのタイプも同じ教育水準を選択　→　e_p

(イ) この場合、企業の信念 $\mu(H|e_p)$ は q でなくてはならない。

(ウ) 観察した e_p に対し、企業が提示する賃金は次　→　$w_p = qy(H,e_p) + (1-q)y(L,e_p)$

(エ) 次に「均衡経路上にない教育水準 $e \neq e_p$」に関する企業の信念と戦略を特定する。

(オ) 最後にどちらのタイプの労働者も企業の戦略に対する最適反応が $e = e_p$ であることをチェックする。

★こうして得られる「一括完全ベイジアン均衡」の組の一例は以下。

• 企業の信念 $\mu(H|e) = [0 \quad for \quad e \neq e_p, \quad q \quad for \quad e = e_p]$

• 企業の戦略 $w(e) = [y(L,e) \quad for \quad e \neq e_p, \quad w_p \quad for \quad e = e_p]$

• 労働者の戦略 $[e(L) = e_p, \quad e(H) = e_p]$

≪一括均衡～ケース②～≫… e_p 以外の教育水準を選ぶ均衡。→図 4.2.7

★ある $\hat{e} \in [e_p, e']$ をとったとき、次の組は「一括完全ベイジアン均衡」

• 企業の信念 $\mu(H|e) = [0 \quad for \quad e \neq \hat{e}, \quad q \quad for \quad e = \hat{e}]$

• 企業の戦略 $w(e) = [y(L,e) \quad for \quad e \neq \hat{e}, \quad \hat{w} \quad for \quad e = \hat{e}]$

• 労働者の戦略 $[e(L) = \hat{e}, \quad e(H) = \hat{e}]$

≪一括均衡～ケース③～≫…均衡経路上にない信念と戦略が異なる。→図 4.2.7

★実現する結果はケース①と同じだが、以下の組も「一括完全ベイジアン均衡」

• 企業の信念 $\mu(H|e) = [0 \quad for \quad e \neq e_p \text{かつ} e \leq e'', \quad q \quad for \quad e = e_p \,\&\, e > e'']$

• 企業の戦略 $w(e) = \begin{bmatrix} y(L,e) & for & e \neq e_p \text{かつ} e \leq e'' & , & \underset{\mu}{E} w & for & e > e'' \\ w_p & for & e = e_p & & & & \end{bmatrix}$

• 労働者の戦略 $[e(L) = e_p, \quad e(H) = e_p]$

◆　次に「分離均衡」を考える。以下では、妬みのない場合のみ考える。

≪分離均衡～ケース①～≫…各タイプ別々のシグナルを送る。→図 4.2.8

（ア）H タイプは自分が「H タイプである」という事を明示できる**<u>シグナル</u>**を送らねばならない。　→　$e_s \geq e^*(H)$

（イ）この場合、企業の信念は$\mu(H|e_s)=1$である。

（ウ）観察したe_sに対し、企業が提示する賃金は次。→$w(e_s)=y(H,e_s)$

（エ）次に「均衡経路上にない教育水準」と、「L タイプ」に関する企業の信念と戦略を特定する。

$$\Rightarrow \quad \mu(H|e)=\begin{cases}0 & for \quad e<e_s \\ 1 & for \quad e\geq e_s\end{cases} \quad と \quad w(e)=\begin{cases}y(L,e) & for \quad e<e_s \\ y(H,e) & for \quad e\geq e_s\end{cases}$$

（オ）最後に各タイプの労働者の、企業の信念と戦略に対する最適反応が、戦略（ア）であることをチェックする。

★　こうして得られた「企業の信念」と「企業／労働者の戦略」の組は「分離完全ベイジアン均衡」である。

≪分離均衡～ケース②～≫…H タイプが $e \neq e_s$ を選ぶ均衡。→図 4.2.8

★　全てのeに対し、$y(H,\hat{e})-C(H,\hat{e})>y(L,e)-C(H,e)$となるような$\hat{e}>e$があるとして、

$$\mu(H|e)=\begin{cases}0 & for \quad e<\hat{e} \\ 1 & for \quad e\geq \hat{e}\end{cases} \quad と \quad w(e)=\begin{cases}y(L,e) & for \quad e<\hat{e} \\ y(H,e) & for \quad e\geq \hat{e}\end{cases}$$

そして　$e(H)=\hat{e}$、$e(L)=e^*(L)$　の組が「分離完全ベイジアン均衡」。

≪分離均衡～ケース③～≫…企業の均衡経路外の設定が異なる。

★　実現する結果はケース①と同じ。

$$\mu(H|e)=\begin{cases}0 & for \quad e\leq e^*(H) \\ \varepsilon & for \quad e^*(H)<e<e_s \\ 1 & for \quad e\geq e_s\end{cases} \quad と \quad w(e)=\begin{cases}y(L,e) & for \quad e\leq e^*(H) \\ \tilde{w} & for \quad e^*(H)<e<e_s \\ y(H,e) & for \quad e\geq e_s\end{cases}$$

そして　$e(H)=e_s$、$e(L)=e^*(L)$　の組が「分離完全ベイジアン均衡」。

★　以上の結果から言えること：

ここで示した「分離完全ベイジアン均衡」はすべて H タイプのファーストベストが歪められている。

◆　最後に「混成均衡」を考察する。

≪混成均衡≫…L タイプがランダムに教育水準を選ぶという場合を取上げる。

（ア）$\eta = H \rightarrow \{ e = e_h \quad w.p \quad 1 \}$

$$\eta = L \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} e = e_h & w.p \quad \pi \\ e = e_L & w.p \quad 1-\pi \end{array} \right\}$$

という労働者の教育水準を観察する。

（イ）この場合、企業の H タイプに関する均衡経路上の信念は $\mu(H|e_h) = \dfrac{q}{q+(1-q)\pi}$ である。

＜注意点①＞

$\mu(H|e_h) > q$　…企業の、H タイプに関する信念は、事前分布よりも強まっている。

＜注意点②＞

$\mu(H|e_h) \rightarrow 1 \quad (\pi \rightarrow 0)$　…L タイプで e_h を選択する者が**減っていく**ときの信念

（ウ）観察した e_h に対し、企業が提示する賃金は次。

$$\rightarrow \quad w(e_h) = \frac{q}{q+(1-q)\pi} y(H, e_h) + \frac{(1-q)\pi}{q+(1-q)\pi} y(L, e_h)$$

（エ）　次に「均衡経路上にない教育水準」と、「L タイプ」に関する企業の信念と戦略を特定する。特に、“「L タイプ」の分離型 ” と無差別になるような教育水準が e_h と等しくなることを示すことが必要。

$\rightarrow \quad w^*(L) - C(L, e^*(L)) = w_h - C(L, e_h)$　となる w_h の存在が重要。

このとき、$w_h < y(H, e_h)$ を充たせば、企業の均衡戦略 $w(e_h)$ が、この混成均衡をサポートする賃金となりうる。そこで、この場合、$w(e_h) = w_h$ とする。

（オ）　最後に各タイプの労働者が、企業の信念と戦略に対する最適反応として（ア）の戦略をとることを示せばよい。

★　以上を、均衡経路外の教育水準も含めてまとめる。

$$\Rightarrow \quad \mu(H|e) = \begin{cases} 0 & for \quad e < e_h \\ q/[q+(1-q)\pi] & for \quad e \geq e_h \end{cases} \quad と \quad w(e) = \begin{cases} y(L, e) & for \quad e < e_h \\ w_h(e) & for \quad e \geq e_h \end{cases}$$

の企業の信念と戦略に加え、労働者の戦略（ア）の組は「混成完全ベイジアン均衡」。

★　なお、ここの混成均衡の一つの極限として≪**分離均衡～ケース①～**≫がある。

（→上記**＜注意点②＞**も参照）